Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Inhalt

Übersicht:

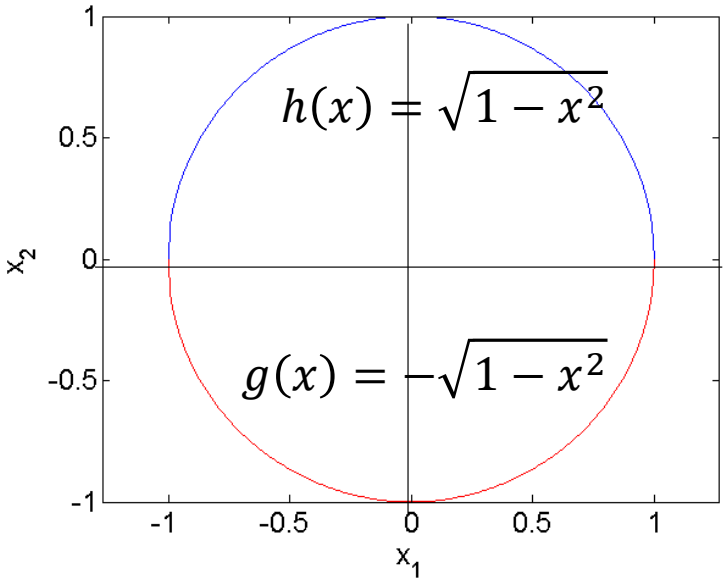
- Integration über Polarkooridnaten
- Integration über Zylinder- und Kugelkoordinaten
- Anwendungen:
  - Flächen- und Volumenberechnung
  - Schwerpunktsberechnung

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel

Wir wollen das Skalarfeld $f(x_1, x_2) = 1$ über den Einheitskreis integrieren…



Bemerkung:

Das Ergebnis ist der Flächeninhalt des Kreises!

Normalbereich:

Zu kompliziert!!!

Wir beschreiben den Kreis als Normalbereich…

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} 1 \; dx_2 \; dx_1 = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x_1^2} \, dx_1 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \; d\varphi = \underbrace{\cos\varphi \sin\varphi + \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{= \pi}$$



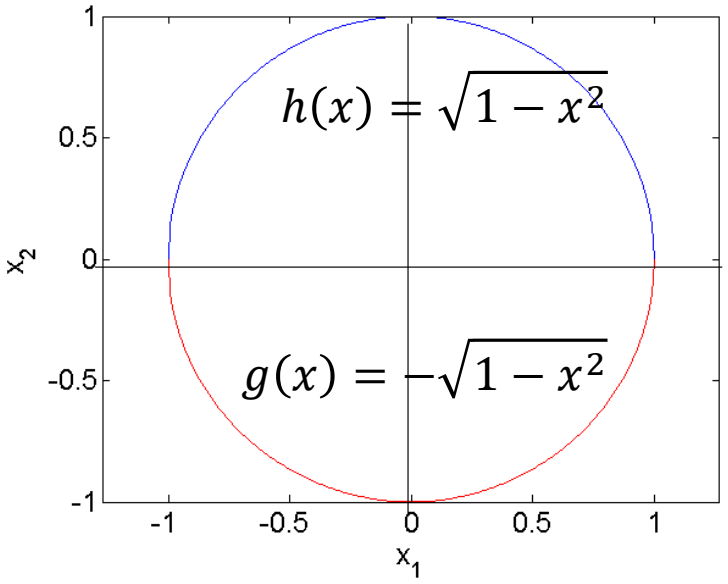
Substitution: $x_1 = \sin\varphi$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel

Wo liegt das Problem bei der Beschreibung durch Normalbereiche?



kartesische Koordinaten eignen sich nicht um einen „runden Kreis“ zu beschreiben…

Beschreibe den Kreis durch besser geeignete Koordinaten (Polarkoorindaten)…

Polarkoordinaten:

$$x_1 = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 1$$

$$x_2 = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Integralrechnung

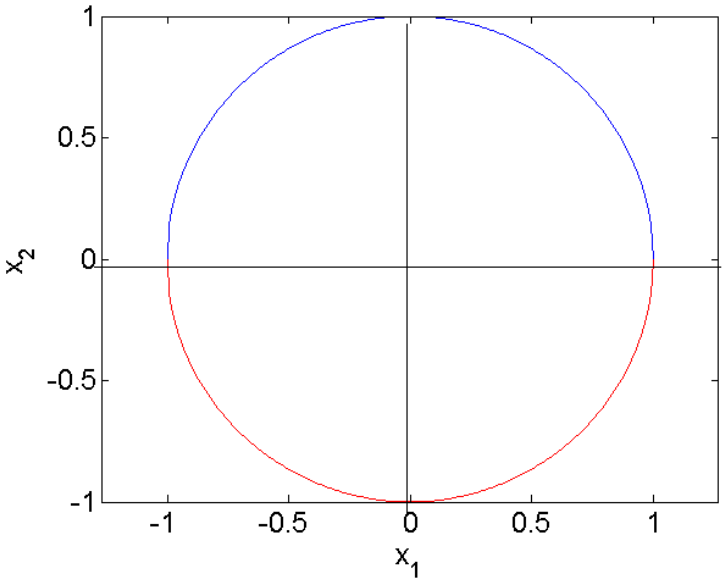
Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel

Wir substituieren die Polarkoordinaten in unserem Integral…

$$x_1 = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 1$$

$$x_2 = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$



$$\iint_K 1\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1 \; r \; dr\, d\varphi$$

Flächenelement:

$$dA = r\, dr\, d\varphi$$

Bei der Substitution muss das Flächenelement angepasst werden

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

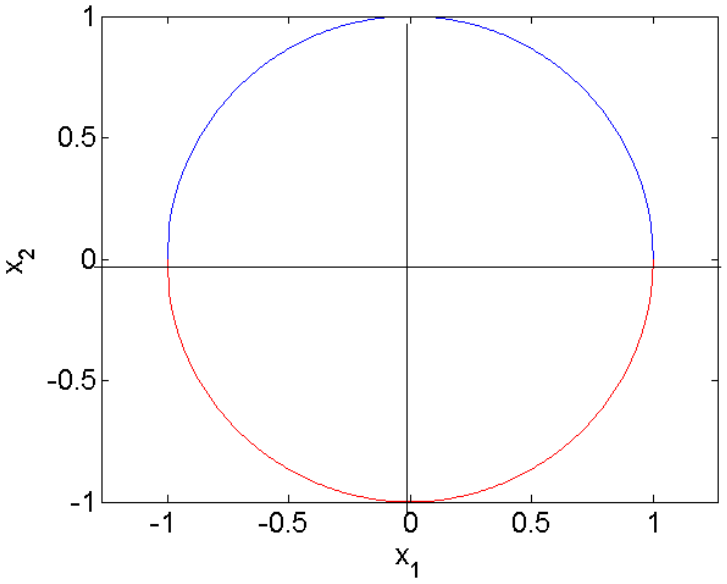
Beispiel

Wir berechnen das Integral…

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r \; dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^{1} r \; dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 \right)$$

$$= \pi$$



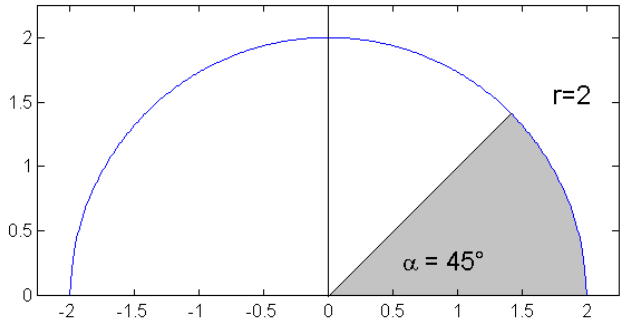
Beobachtung:

Das Verwenden von „problem-angepassten" Koordinaten vereinfacht die Integration…

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel



Wir integrieren das Skalarfeld $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ über das Kreissegment mit dem Winkel 45° und dem Radius R=2.

Wir verwenden Polarkoordinaten…

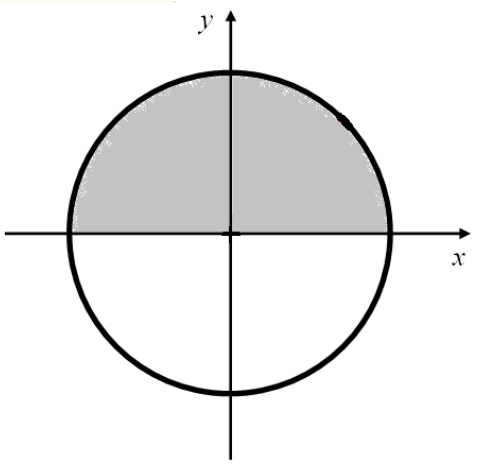
$$x_1 = r\cos\varphi \qquad x_2 = r\sin\varphi$$

Zur Beschreibung des Kreissegmentes, passen wir die Grenzen an…

$$0 \le r \le 2 \qquad 0 \le \varphi \le {}^{\pi}/_{4}$$

$$\iint_K x_1 x_2 \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_0^2 \underbrace{r\cos\varphi}_{=x_1} \cdot \underbrace{r\sin\varphi}_{=x_2} \cdot \underbrace{r\, dr\, d\varphi}_{=dA} = 2\sin^2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 1$$

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel



Jetzt sind Sie an der Reihe…

Integrieren Sie das Skalarfeld

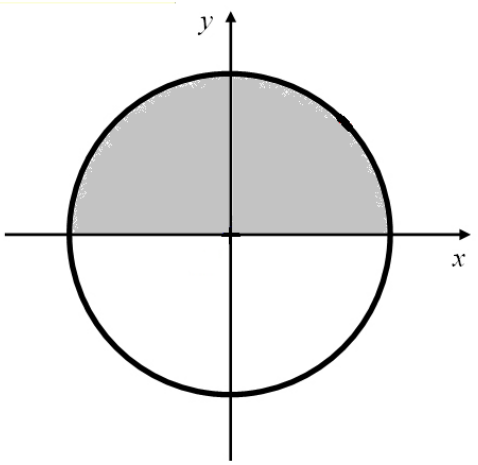
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

über den Halbkreis mit Radius R=1…

Hinweis:

Sie können den Integranden mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras stark vereinfachen…

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel



Jetzt sind Sie an der Reihe…

Integrieren Sie das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

über den Halbkreis mit Radius R=1…

$$\int_0^1 \int_0^{\pi} \underbrace{[(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2]}_{= r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}} \cdot r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\pi} r^3 \, d\varphi \, dr$$

$$= \pi \int_0^1 r^3 \, dr$$

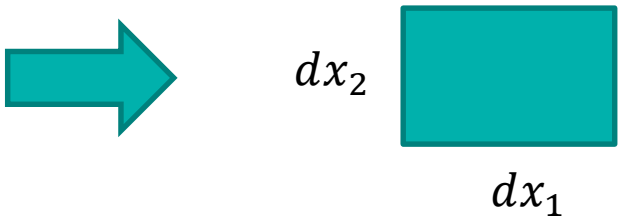
$$= \frac{\pi}{4} r^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Warum muss das Flächenelement angepasst werden?

In kartesischen, rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich das Flächenelement wie folgt…

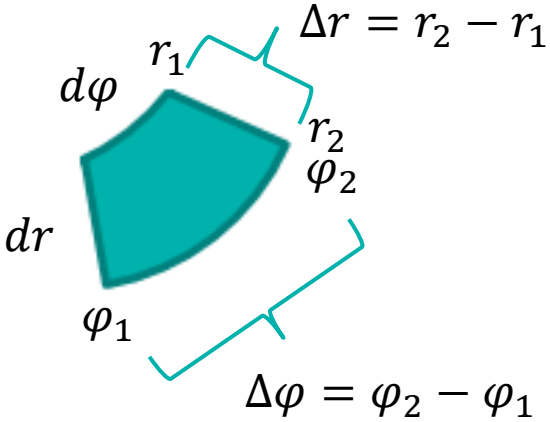
$$dA = dx_1 \cdot dx_2$$



In Polarkoordinaten sieht das Flächenelement wie folgt aus…

$$dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

„Verzerrung" muss korrigiert werden



Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Wie kann ich Flächenelemente berechnen?

Der Koordinatenwechsel wird durch eine Koordinatentransformation, d.h. eine Abbildung, durchgeführt…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Wie kann ich Flächenelemente berechnen?

Der Koordinatenwechsel wird durch eine Koordinatentransformation, d.h. eine Abbildung, durchgeführt…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Das Oberflächenelement erhalten wir dann mit Hilfe der Determinante der Jacobi-Matrix (Funktionaldeterminante)…

$$\Rightarrow \quad dA = det\left(J_{\vec{F}}\right) \cdot dr \cdot d\varphi$$

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Wie kann ich Flächenelemente berechnen?

Der Koordinatenwechsel wird durch eine Koordinatentransformation, d.h. eine Abbildung, durchgeführt…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Das Oberflächenelement erhalten wir dann mit Hilfe der Determinante der Jacobi-Matrix (Funktionaldeterminante)…

$$\Rightarrow \quad dA = det\left(J_{\vec{F}}\right) \cdot dr \cdot d\varphi$$

Bemerkung:

Die Beziehung gilt allgemein für alle Koordinatentransformationen, d.h. auch bei Volumina!

Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante

Wir betrachten die Abbildung…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante

Wir betrachten die Abbildung…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante besteht aus den Gradienten der Komponenten, welche die Zeilenvektoren definieren…

$$\nabla F_1 = \begin{pmatrix} \partial_r F_1 \\ \partial_\varphi F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\nabla F_2 = \begin{pmatrix} \partial_r F_2 \\ \partial_\varphi F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die Determinante!

Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante

Für die Determinante erhalten wir…

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi$$

$$= r \cdot \underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{=1}$$

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Koordinatentransformationen bei Volumenintegralen

Nützlich sind die folgenden Koordinatenwechsel…

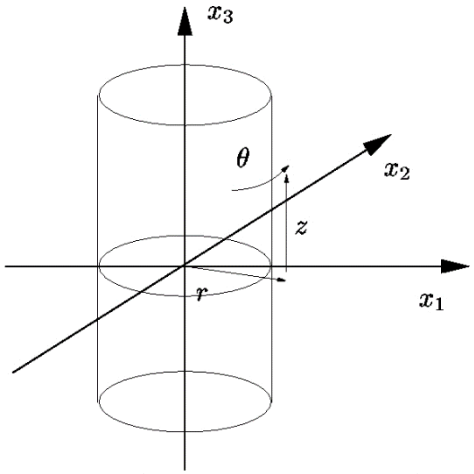
FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Koordinatentransformationen bei Volumenintegralen

Nützlich sind die folgenden Koordinatenwechsel…

Zylinderkoordinaten:



$$x_1 = r\cos\theta \qquad r \geq 0$$

$$x_2 = r\sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x_3 = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

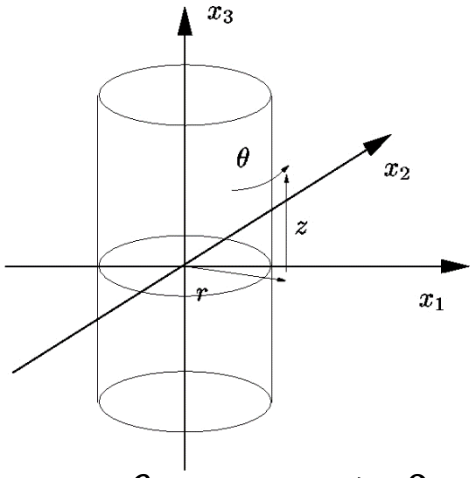
$$dV = r \cdot dr\, d\theta\, dz$$

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Koordinatentransformationen bei Volumenintegralen

Nützlich sind die folgenden Koordinatenwechsel…

Zylinderkoordinaten:



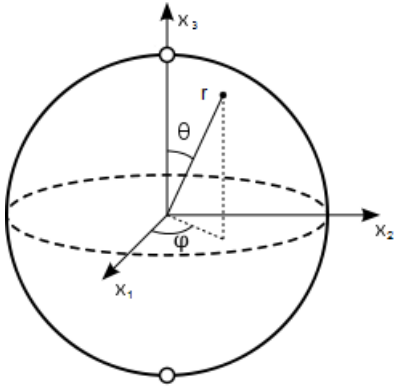
$$x_1 = r\cos\theta \qquad r \geq 0$$

$$x_2 = r\sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x_2 = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

$$dV = r \cdot dr\, d\theta\, dz$$

Kugelkoordinaten:



$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r \geq 0$$

$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$x_3 = r\cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

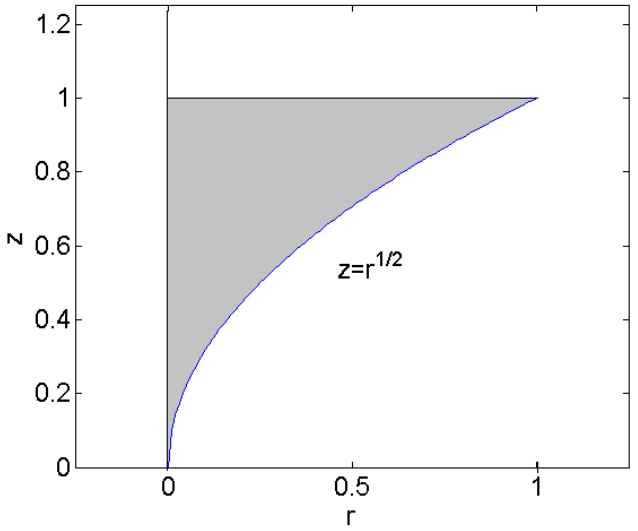
$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Zylinderkoordinaten

Wir wollen das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ über ein Volumen integrieren, das durch Rotation um x_3-Achse entsteht…

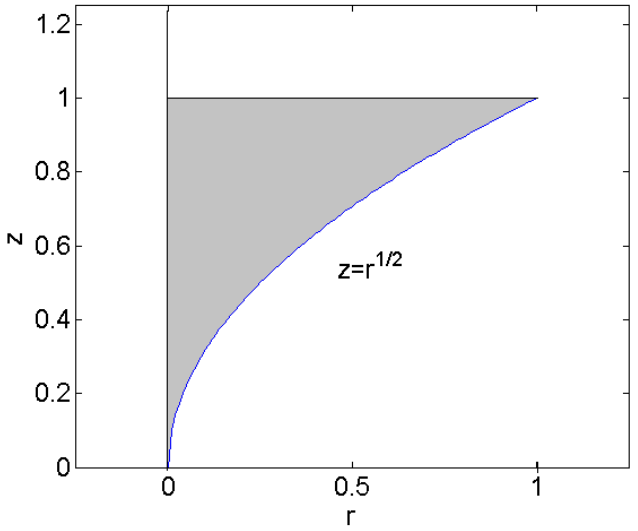


Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Zylinderkoordinaten

Wir wollen das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ über ein Volumen integrieren, das durch Rotation um x_3-Achse entsteht…



Wir verwenden Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$x_2 = r\sin\theta \qquad 0 \le z \le 1$$
$$x_3 = z \qquad 0 \le r \le z^2$$

Alternativ: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, $\sqrt{r} \le z \le 1$

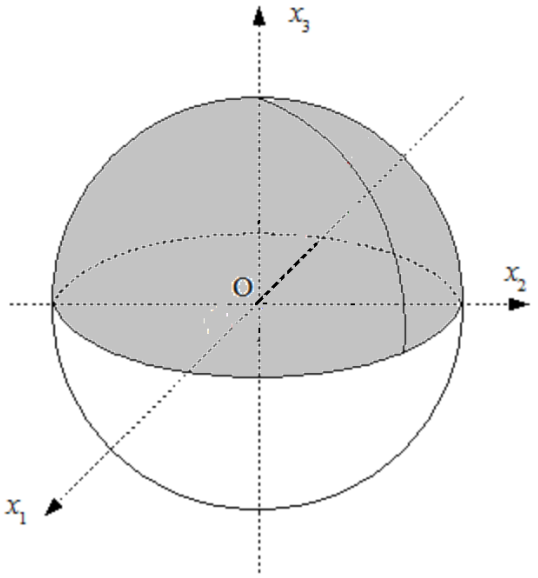
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{z^2} \underbrace{\left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)}_{=r^2} \cdot r\, dr\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{z^2} r^3\, dr\, dz\, d\theta = \frac{\pi}{18}$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Kugelkoordinaten

Wir wollen das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$ über die obere Halbkugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung integrieren…

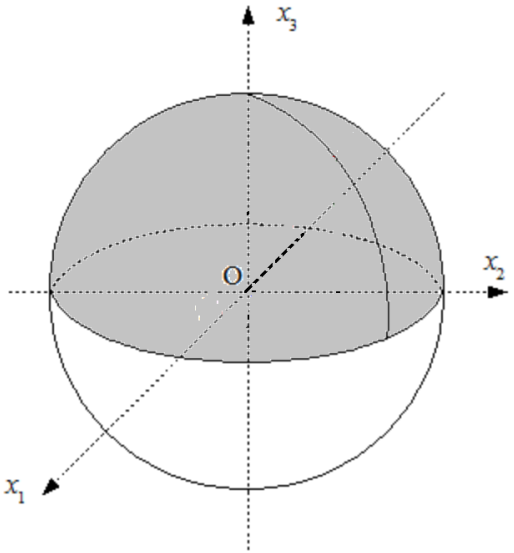


Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Kugelkoordinaten

Wir wollen das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$ über die obere Halbkugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung integrieren…



Kugelkoordinaten mit angepassten Grenzen:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \qquad 0 \le r \le R$$

$$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$x_2 = r \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \underbrace{(r \sin\theta \cos\varphi}_{= x_1} + \underbrace{2r \cos\theta}_{= 2x_3}) \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta}_{= dV} = \cdots = \frac{1}{2} R^4 \pi$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Volumenelemente

Wir berechnen das Volumenelement für die Zylinderkoordinaten…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (r,\theta,z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Volumenelemente

Wir berechnen das Volumenelement für die Zylinderkoordinaten…

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (r,\theta,z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgende Funktionaldeterminante…

$$\det\left(J_{\vec{F}}\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Anwendung: Flächen- und Volumenberechnung

Wir können den Flächeninhalt eines Gebietes G berechnen, indem wir folgendes Doppelintegral berechnen…

$$A = |G| = \iint_G 1 \, dA$$

Anwendung: Flächen- und Volumenberechnung

Wir können den Flächeninhalt eines Gebietes G berechnen, indem wir folgendes Doppelintegral berechnen…

$$A = |G| = \iint_G 1 \, dA$$

Analog erhalten wir das Volumen eines 3D Objektes indem wir folgendes Volumenintegral ausrechnen…

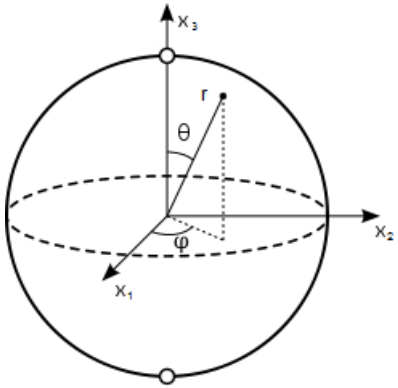
$$|V| = \iiint_V 1 \, dV$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Volumenberechnung

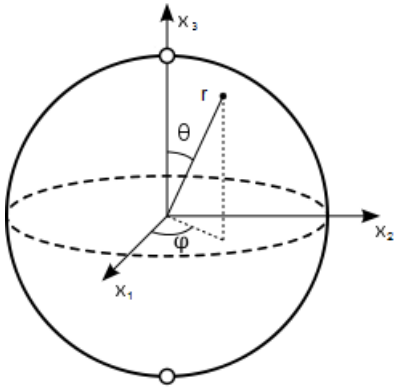
Wir wollen das Volumen einer Kugel mit Radius R bestimmen…



Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Volumenberechnung



Wir wollen das Volumen einer Kugel mit Radius R bestimmen…

Wir berechnen das folgendes Integral…

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta \; d\varphi \, d\theta \, dr}_{= dV}$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin\theta \; d\theta \, dr$$

$$= 4\pi \int_0^R r^2 \, dr$$

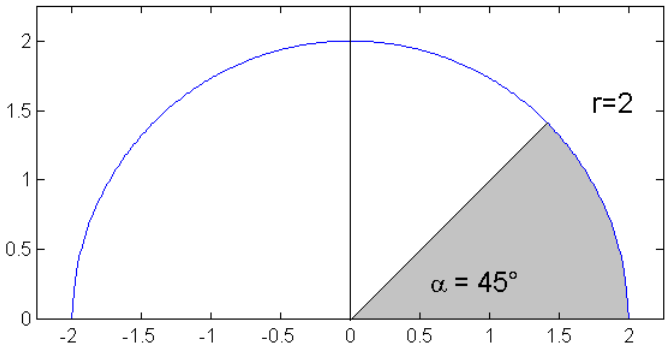
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Flächenberechnung

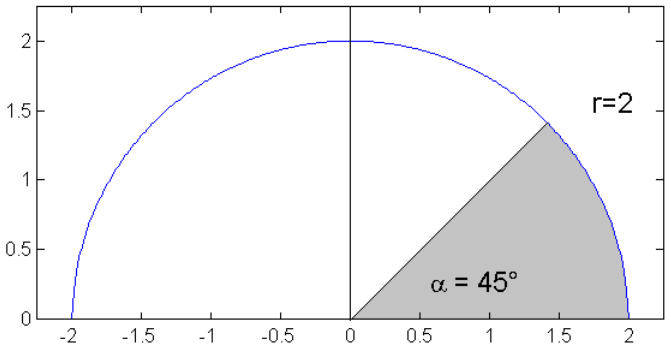
Wir wollen die Fläche des Kreissegmentes berechnen…



Integralrechnung

Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Beispiel: Flächenberechnung



Wir wollen die Fläche des Kreissegmentes berechnen…

Wir verwenden Polarkoordinaten mit passenden Grenzen und berechnen…

Radius ist 2

Achtelkreis

$$A = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} 1 \cdot \underbrace{r \, d\varphi \, dr}_{= dA} = \frac{\pi}{4} \int_0^2 r \, dr = \frac{\pi}{2}$$

Masse und Ladung aus den Dichten

Massen- und Ladungsverteilungen werden oft durch Massen- bzw. Ladungsdichten beschrieben…

$$\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x_1, x_2, x_3)$$

Masse und Ladung aus den Dichten

Massen- und Ladungsverteilungen werden oft durch Massen- bzw. Ladungsdichten beschrieben…

$$\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x_1, x_2, x_3)$$

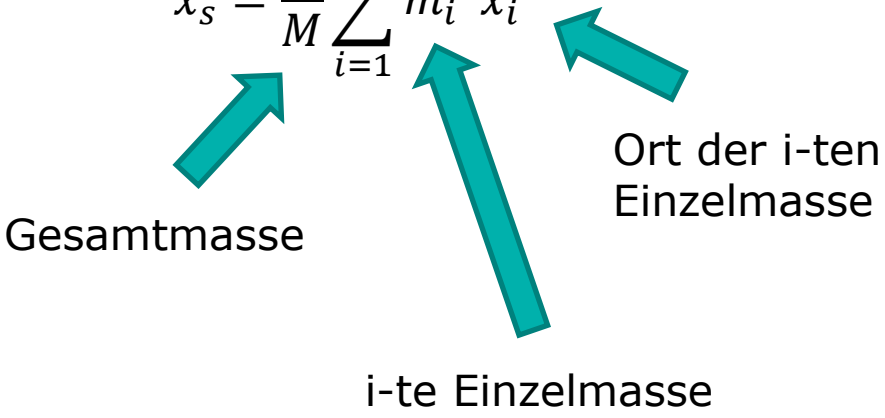
Wir erhalten die Gesamtmasse M bzw. die Gesamtladung Q mit Hilfe der folgenden Volumenintegrale…

$$M = \iiint_V \rho(x_1, x_2, x_3)\, dV \qquad Q = \iiint_V \rho(x_1, x_2, x_3)\, dV$$

Massenschwerpunkt

Wir betrachten eine diskrete Massenverteilung, dann gilt für die Schwerpunktskoordinate…

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \ \vec{x}_i$$



Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Massenschwerpunkt

Wir betrachten eine diskrete Massenverteilung, dann gilt für die Schwerpunktskoordinate…

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \ \vec{x}_i$$

Wir gehen über zur kontinuierlichen Verteilung, die durch die Dichte ρ beschrieben wird, wobei wir über kleine Quader summieren…

$$\vec{x}_s \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}\right) \ \vec{\xi}^{(i)} \ \Delta V$$



$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x}) \ \vec{x} \ \ dV$$

Integralrechnung

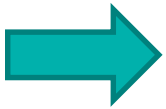
Mehrfachintegrale: Koordinatenwechsel

Massenschwerpunkt

Schwerpunktsformel…

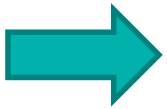
$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x})\, \vec{x}\; dV$$

Was bedeutet das Integral, bzw. wie berechnen wir es?



Komponentenweise…

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x})\, \vec{x}\; dV$$



$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x})\, x_1 dV \\ x_2 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x})\, x_2 dV \\ x_3 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x})\, x_3 dV \end{cases}$$